自旋几何与 Dirac 算子

院长讨论班讲稿

王进一

jin12003@163.com

2022 年秋

目录

1 Clifford 代数与旋量群

1.1 Clifford 代数

Clifford 代数在几何与物理上有重要的意义. 考虑带有二次型的向量空间 (V, q). 定义

$$\mathrm{C}\ell(V,q) := \mathscr{T}(V)/(x \otimes x + q(x)).$$

直观上, $\mathrm{C}\ell(V,q)$ 是 V 中的向量在 $x \cdot x = -q(x)$ 的关系之下生成的代数. [注 1]

下文中的向量乘法 xy 默认为 Clifford 代数中的乘法.

注意到 $(x \otimes x + q(x))$ 是由偶数次元素生成的理想, 从而 $\mathrm{C}\ell(V,q)$ 继承了 $\mathscr{T}(V)$ 的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次代数结构. 我们记这个分次结构为 $\mathrm{C}\ell(V,q) = \mathrm{C}\ell^0 \oplus \mathrm{C}\ell^1$. 换言之, $\mathrm{C}\ell^0$ 是 $\mathrm{C}\ell(V,q)$ 中由形如 xy 的元素生成的子代数.

$\mathrm{C}\ell(V,q)$ 上有滤过结构: $\mathscr{F}^r$ 是由不超过 r 个向量的乘积张成的向量子空间, 满足 $\mathscr{F}^r\mathscr{F}^s \subset \mathscr{F}^{r+s}$.

与外代数的典范同构　因为 $\wedge^* V$ 可视为 $\mathscr{T}V$ 的子空间 (但不是子代数):

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \mapsto \frac{1}{m!}\sum_{\sigma \in S_m} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(m)},$$

复合商映射, 我们得到典范的线性映射 $\wedge^* V \to \mathrm{C}\ell_n$(但不是代数同态). 容易证明这是一个同构.

Clifford 代数的基

命题 1.1. 设 $e_1, \cdots, e_n$ 为 V 关于 q 的正交基[注 2], 即 $q(e_i, e_j) = 0\,(i \neq j)$. 那么 $\mathrm{C}\ell(V,q)$ 的一组基为

$$e_{i_1} \cdots e_{i_k}\,(0 \leq k \leq n).$$

推论 1.2. $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{C}\ell(V,q) = 2^n$.

注意到若 $q(x,y) = 0$, 则 x, y 反交换:

$$xy + yx = (x+y)^2 - x^2 - y^2 = -q(x+y) + q(x) + q(y) = -2q(x,y).$$

Clifford 代数上的内积结构　我们引入 $\mathrm{C}\ell(V,q)$ 上自然的内积. 这里自然是一个非常重要的性质, 指不依赖于向量空间 V 的基的选取.

张量代数 $\mathscr{T}V$ 上的转置 $(-)^t$ 对于纯张量定义为

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)^t = v_r \otimes \cdots \otimes v_1.$$

注意到 $(x \otimes x + q(x))^t = x \otimes x + q(x)$, 故 $(-)^t \colon \mathscr{T}V \to \mathscr{T}V$ 诱导了转置 $(-)^t \colon \mathrm{C}\ell(V,q) \to \mathrm{C}\ell(V,q)$. 由定义, $(xy)^t = y^t x^t$.

定义 $\alpha \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto -x$. α 诱导了 $\mathscr{T}V$ 作为代数的自同构 $\alpha \colon \mathscr{T}V \to \mathscr{T}V$,

$$\alpha(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = (-1)^r v_1 \otimes \cdots \otimes v_r.$$

[注 1] 这个看上去有些奇怪的负号可追溯至 Grassmann 的 *Ausdehnungslehre*, 以及 Hamilton 关于四元数的工作, 与 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ 有关. Clifford 正是在此基础上定义了后人称作 Clifford 代数的东西.

[注 2] 由于此处 q 是任意的二次型, 我们无法要求这些向量的长度, 但正交基总是存在的.

注意到 $\alpha(x\otimes x+q(x))=x\otimes x+q(x)$, 故 α 诱导了代数自同构 $\alpha\colon \mathrm{C}\ell(V,q)\to \mathrm{C}\ell(V,q)$. 注意到 $\mathrm{C}\ell^0,\mathrm{C}\ell^1$ 是 α 的特征子空间: $\alpha|_{\mathrm{C}\ell^0}=1$, $\alpha|_{\mathrm{C}\ell^1}=-1$.

注意到 α 和 $(-)^t$ 是交换的:

$$\alpha((v_1\otimes\cdots\otimes v_r)^t)=(-1)^r v_r\otimes\cdots\otimes v_1=(\alpha(v_1\otimes\cdots\otimes v_r))^t.$$

另外 α 和 $(-)^t$ 都是对合, 即 $\alpha(\alpha(x))=x$, $(x^t)^t=x$.

将上述两个运算复合, 我们定义 Clifford 共轭 $\overline{(-)}$, 作为复共轭与四元数共轭的推广:

$$\overline{x}:=\alpha(x^t).$$

定义迹映射 $\mathrm{tr}\colon \mathrm{C}\ell(V,q)\to\mathbb{R}$,

$$\mathrm{tr}(x):=\frac{1}{2^n}\operatorname{tr}L_x,\quad L_x\colon \mathrm{C}\ell(V,q)\to\mathrm{C}\ell(V,q),\ y\mapsto xy.$$

注意到 $\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{C}\ell(V,q)=2^n$, 故 $\mathrm{tr}(1)=\frac{1}{2^n}\cdot 2^n=1$; 而对 V 关于 q 的任意正交基 $e_1,\cdots,e_n$, 对任意子集 $\{i_1,\cdots,i_k\}\subset\{1,\cdots,n\}\,(k>0)$, 有 $\mathrm{tr}(e_{i_1}\cdots e_{i_k})=0$. 故 $\mathrm{tr}(x)$ 也等于 x 在这组基下的展开的 0 阶项. (特别地, 这说明 0 阶项是自然的, 这个事实从定义不容易看出.) 因此有 $\mathrm{tr}(x)=\mathrm{tr}(\alpha(x))=\mathrm{tr}(x^t)$. 另外, 由迹的定义可知 $\mathrm{tr}(xy)=\mathrm{tr}(yx)$.

定义 Clifford 代数 $\mathrm{C}\ell(V,q)$ 上的双线性型 $(-,-)$ 与函数 Norm,

$$(x,y):=\mathrm{tr}(x\overline{y})=\mathrm{tr}(\alpha(x)\,y^t),\quad \mathrm{Norm}(x):=(x,x).$$

遗憾的是, Norm 一般并不保持乘法. 但是, 若 x,y 分别是若干个向量的乘积, 则有 $\mathrm{Norm}(xy)=\mathrm{Norm}(x)\,\mathrm{Norm}(y)$.

约定　以下记 $\mathrm{C}\ell_n=\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^n,|\cdot|^2)$, $\mathrm{C}\ell_n'=\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^n,-|\cdot|^2)$. 本文中所有的 $|\cdot|$ 都是指 $\mathbb{R}^n$ 上的标准 Euclid 范数. 在文献中有如下的记号 (但我们不会用到):

$$\mathrm{C}\ell_{r,s}=\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^n,x_1^2+\cdots+x_r^2-x_{r+1}^2-\cdots-x_{r+s}^2).$$

那么用我们的记号, $\mathrm{C}\ell_{n,0}=\mathrm{C}\ell_n$, $\mathrm{C}\ell_{0,n}=\mathrm{C}\ell_n'$.

例　$\mathrm{C}\ell_1\simeq\mathbb{C}$; $\mathrm{C}\ell_2\simeq\mathbb{H}$.

值得一提的是, $\mathrm{C}\ell_2^0\simeq\mathbb{C}$, $\mathrm{C}\ell_3^0\simeq\mathbb{H}$. 一般地, $\mathrm{C}\ell_{n+1}^0\simeq\mathrm{C}\ell_n$.

$\mathrm{C}\ell_3^0$ 的一组基是 $1,i=e_2e_3,j=e_3e_1,k=e_1e_2$.

1.2　伴随表示

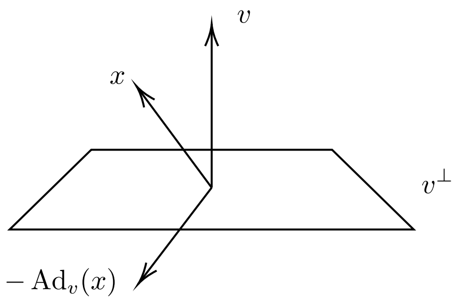
定义 Clifford 代数 $\mathrm{C}\ell_n$ 上的的伴随表示

$$\mathrm{Ad}\colon \mathrm{C}\ell_n^\times\to\mathrm{Aut}(\mathrm{C}\ell_n),\quad \mathrm{Ad}_\varphi(x)=\varphi x\varphi^{-1}.$$

其中 $\mathrm{C}\ell_n^\times$ 表示可逆[注 3]元素的乘法群. 伴随表示的重要性质是:

命题 1.3. *设 $v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, 则 $-\mathrm{Ad}_v$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上关于 $v^\perp$ 的反射.*

[注 3]在一般的 (非交换) 代数中, 可逆的定义是同时有左逆和右逆.



证明. 注意到, 两个向量的内积

$$(x,y)=\frac{1}{2}\big(-(x+y)^2+x^2+y^2\big)=-\frac{1}{2}(xy+yx).$$

因此 x 关于 $v^\perp$ 的反射为

$$x-\frac{2(x,v)}{(v,v)}v=x-\frac{xv+vx}{v^2}v=-vxv^{-1}.$$

□

因为两个反射的乘积为一旋转, 故得

推论 1.4. 对任意 $v,w\in\mathbb{R}^n$, $\operatorname{Ad}_{vw}\in\mathrm{SO}(n)$.

1.3 旋量群

当 $n\geq 3$ 时, $\pi_1(\mathrm{SO}(n))\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 旋量群 Spin_n 是 $\mathrm{SO}(n)$ 的万有覆盖群. 下面我们给出 Spin_n 的具体构造.

定义 Pin_n 为 $\mathrm{C}\ell_n^\times$ 中由 $\{v\in\mathbb{R}^n:|v|=1\}$ 生成的子群. 定义 $\mathrm{Spin}_n=\mathrm{Pin}_n\cap\mathrm{C}\ell_n^0$. 换言之,

$$\mathrm{Pin}_n=\{v_1\cdots v_r:|v_j|=1\},\quad \mathrm{Spin}_n=\{v_1\cdots v_r:|v_j|=1,\ r\ \text{为偶数}\}.$$

因为 O_n 中的任何元素均可表示为有限个 (不超过 n 个) 反射, 且 SO_n 的元素表示为偶数个反射, 所以有

推论 1.5. Ad 给出了满同态 $\mathrm{Pin}_n\to\mathrm{O}(n)$ 以及 $\mathrm{Spin}_n\to\mathrm{SO}(n)$.

命题 1.6. 对于 $x\in\mathrm{Pin}_n$, $L_x\in\mathrm{SO}(\mathrm{C}\ell_n)$.

证明. 只需对生成元验证结论. 设 $x\in\mathbb{R}^n$, $|x|=1$. 对 $\varphi,\psi\in\mathrm{C}\ell_n$,

$$(x\varphi,x\psi)=\operatorname{tr}(x\varphi\overline{x\psi})=\operatorname{tr}(\overline{x\psi}x\varphi)=\operatorname{tr}(\overline{\psi}(\bar{x}x)\varphi)=\operatorname{tr}(\overline{\psi}\varphi)=(\varphi,\psi).$$

由 Pin_n 的定义知 Pin_n 是连通的, 所以 $L_x\in\mathrm{SO}(\mathrm{C}\ell_n)$. □

命题 1.7. $\operatorname{Ad}\colon\mathrm{Spin}_n\to\mathrm{SO}(n)$ 是二重覆盖.

证明. 我们证明 $\ker(\operatorname{Ad}\colon\mathrm{Spin}_n\to\mathrm{SO}(n))=\{\pm1\}$.

取 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $e_1,\cdots,e_n$.

假设 $\varphi\in\mathrm{Spin}_n$, $\operatorname{Ad}_\varphi=\mathrm{id}$, 则 φ 与 $\mathbb{R}^n$ 中的全体向量交换.

设 $\varphi=a+be_1$, 其中 a,b 为 $e_2,\cdots,e_n$ 的多项式, $a\in\mathrm{C}\ell_n^0$, $b\in\mathrm{C}\ell_n^1$. 那么 e_1 与 a 交换. 又 e_1 与 φ 交换, 知 e_1 与 b 交换. 这说明 $b=0$, 从而 φ 不含 e_1.

同理, φ 不含任何一个 e_i. 故 $\varphi\in\mathbb{R}$. 由命题1.6, $\varphi=\pm1$. □

由于 Spin_n 是连通的, 它是 SO_n 的非平凡二重覆盖, 故得

推论 1.8. 当 $n\geq 3$ 时, Spin_n 是单连通的.

1.4 Spin_n 的 Lie 代数

将 Spin_n 视为 $\mathrm{C}\ell_n^\times$ 的 Lie 子群, 则其 Lie 代数 $\mathfrak{spin}_n$ 可视为 $\mathrm{c}\ell_n^\times$ 的 Lie 子代数, Lie 括号为 $[x,y]=xy-yx$.

对于正交的单位向量 e_1,e_2, 令 $i=e_1e_2$, 则 $e^{it}=\cos t+i\sin t\in\mathrm{Spin}_n$ 在 $t=0$ 处的导数为 i. 这说明对于一组标准正交基 $\{e_j\}$, $\mathfrak{spin}_n$ 包含了 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个元素 $e_je_k\,(j<k)$. 而 $\dim\mathrm{Spin}_n=\dim\mathrm{SO}_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$, 故

$$\mathfrak{spin}_n=\mathrm{span}\{e_je_k : j<k\}.$$

回忆二重覆盖 $\xi_0\colon\mathrm{Spin}_n\to\mathrm{SO}_n$. 我们研究其诱导的 Lie 代数同态 $\Xi_0\colon\mathfrak{spin}_n\to\mathfrak{so}_n$. 将 $\mathfrak{so}_n$ 的元素视为 n 阶反对称矩阵, 记 $e_j\wedge e_k$ 为如下矩阵.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} j & k \end{array} \\ \begin{array}{c} j \\ k \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

一般地, $v\wedge w$ 对应变换 $x\mapsto\langle v,x\rangle\,w-\langle w,x\rangle\,v$.

命题 1.9. 对 $j<k$,

$$\Xi_0(e_je_k)=2e_j\wedge e_k.$$

证明. 记 $i=e_je_k$, 则

$$\begin{aligned}\Xi_0(e_je_k)(x)&=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\xi_0(e^{it})(x)\\&=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}e^{it}xe^{-it}\\&=ix-xi\\&=2e_j\wedge e_k(x).\end{aligned}$$

其中最后一步注意到 i 与 $e_\ell\,(\ell\neq j,k)$ 均交换. □

上面的命题建立了 $\mathfrak{spin}_n$ 与 $\mathfrak{so}_n$ 的联系.

推论 1.10. 对 $x,y\in\mathbb{R}^n$,

$$\Xi_0^{-1}(x\wedge y)=\frac{1}{4}[x,y].$$

证明. 由 $\Xi_0^{-1}(e_j\wedge e_k)=\frac{1}{2}e_je_k$ 得

$$\Xi_0^{-1}(e_j\wedge e_k)=\frac{1}{4}[e_j,e_k].$$

(注意右端是 $\mathrm{C}\ell_n$ 中的交换子, 故此式对 $j=k$ 也成立.) 线性延拓可得结论. □

设 M 是 $\mathrm{C}\ell_n$-左模, 则有 Spin_n 的表示 $\mu\colon\mathrm{Spin}_n\to\mathrm{SO}(M)$. 考虑 Lie 代数同态

$$\mathfrak{so}_n\xrightarrow{\Xi_0^{-1}}\mathfrak{spin}_n\xrightarrow{\mu_*}\mathfrak{so}(M).$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{C}\ell_n^\times & \longrightarrow & \mathrm{GL}(M) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{SO}_n & \xleftarrow[\xi_0]{} & \mathrm{Spin}_n & \xrightarrow[\mu]{} & \mathrm{SO}(M) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & \mathfrak{cl}_n & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(M) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{so}_n & \xleftarrow[\Xi_0]{} & \mathfrak{spin}_n & \xrightarrow[\mu_*]{} & \mathfrak{so}(M) \end{array}$$

$$x \wedge y \longleftarrow \frac{1}{4}[x, y]$$

推论 1.11. [注 4] 在上述假设下, 对于 $v \wedge w \in \mathfrak{so}_n\,(v, w \in \mathbb{R}^n)$, $m \in M$,

$$\mu_*(v \wedge w)(m) = \frac{1}{4}[v, w] \cdot m.$$

1.5 Clifford 代数的表示

许多问题可化为 Clifford 代数的表示. 比如, 由于 $\mathrm{Spin}_n \subset \mathrm{C}\ell_n^0 \subset \mathrm{C}\ell_n$, Clifford 代数的表示自然诱导 Spin_n 的表示.

为了研究 Clifford 代数的表示, 有必要了解 Clifford 代数的结构. 前 8 个 Clifford 代数的结构与不可约表示的数量 v_n 如下表 (但请注意这些同构不是典范的). 其中 $\mathbb{H}(2)$ 表示 $\mathbb{H}$ 上的 2 阶矩阵代数.

n	$\mathrm{C}\ell_n$	v_n
1	$\mathbb{C}$	1
2	$\mathbb{H}$	1
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	2
4	$\mathbb{H}(2)$	1
5	$\mathbb{C}(4)$	1
6	$\mathbb{R}(8)$	1
7	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	2
8	$\mathbb{R}(16)$	1

由周期性定理 $\mathrm{C}\ell_{n+8} \simeq \mathrm{C}\ell_n \otimes \mathbb{R}(16)$[注 5]可得所有 $\mathrm{C}\ell_n$ 的同构类.

因为矩阵代数是单代数, 一个单代数仅有一个不可约表示, 所以由上表可得 Clifford 代数的表示的分类.

值得一提的是, 定义 $\mathbb{C}\ell_n = \mathrm{C}\ell(\mathbb{C}^n, q_{\mathbb{C}})$, 其中 $q_{\mathbb{C}}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上唯一的二次型, 那么 $\mathbb{C}\ell_{n+2} \simeq \mathbb{C}\ell_n \otimes \mathbb{C}(2)$, 即复数域上 Clifford 代数的结构更简单.

2 主从, 分类空间与示性类

2.1 主丛

设 X 为仿紧 (paracompact) Hausdorff 空间, G 为拓扑群.

X 上的 G-主丛 (principal G-bundle) 是一种特殊的纤维丛, 其纤维上具有简单传递的 G-*右*作用. 特别地, 这说明每个纤维同胚于 G.

G-主丛的等价定义是以 G 为纤维, G 为结构群的丛, 且结构群*左*作用于纤维上.

直观上, G-主丛是纤维形如 G 的丛, 但纤维忘掉了 “单位元”, 同一纤维上每个点都是平等的.

[注 4]这里特别容易产生混淆.

[注 5]证明略.

下面讨论 G-主丛的局部刻画. 给定 X 的开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 使得存在保持 G-作用的局部平凡化 $\pi^{-1}(U_\alpha)\xrightarrow{h_\alpha}U_\alpha\times G$. 这些局部平凡化之间存在**转移函数** (transition functions) $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha\times U_\beta\to G$, 满足如下交换图,

$$\begin{tikzcd}
U_{\alpha\beta}\times G & & \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[ll, "h_\alpha"'] \arrow[dll, "h_\beta"] \arrow[ddl] \\
U_{\alpha\beta}\times G \arrow[u, "{(\mathrm{id},g_{\alpha\beta})}"] \arrow[dr] & & \\
& U_{\alpha\beta} &
\arrow[from=1-1, to=3-2]
\end{tikzcd}$$

其中 $U_{\alpha\beta}:=U_\alpha\cap U_\beta$, 对于 $x\in U_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}(x)$ 左作用于 G 上. 注意这个左作用 (即 G-主丛的结构群的作用) 与 G 在纤维上的右作用交换.

转移函数须满足 Čech 1-上圈条件, 即在 $U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$ 上,

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha}=1.$$

这由下图即可看出.

$$\begin{tikzcd}
U_{\alpha\beta\gamma}\times G \arrow[dd, bend right, "g_{\gamma\alpha}"'] \arrow[dddr] & & \\
U_{\alpha\beta\gamma}\times G \arrow[u, "g_{\alpha\beta}"] \arrow[ddr] & & \pi^{-1}(U_{\alpha\beta\gamma}) \arrow[ull, "h_\alpha"'] \arrow[ll, "h_\beta"] \arrow[dll, "h_\gamma"] \arrow[ddl] \\
U_{\alpha\beta\gamma}\times G \arrow[u, "g_{\beta\gamma}"] \arrow[dr] & & \\
& U_{\alpha\beta\gamma} &
\end{tikzcd}$$

G-主丛的信息由开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和满足 Čech 上圈条件的转移函数 $g_{\alpha\beta}$ 完全确定.

一个自然的问题是, 给定开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和两组转移函数 $g_{\alpha\beta}$, $g'_{\alpha\beta}$, 由它们确定的 G-主丛何时等价. 假若等价, 那么存在函数 $g_\alpha\colon U_\alpha\to G$ 满足如下交换图,

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha\times G \arrow[dr] & \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, "h_\alpha"'] \arrow[r, "h'_\alpha"] \arrow[d] & U_\alpha\times G \arrow[ll, bend right, "g_\alpha"'] \arrow[dl] \\
& U_\alpha &
\end{tikzcd}$$

那么有如下交换图.

$$\begin{tikzcd}
U_{\alpha\beta}\times G \arrow[dddr] & & U_{\alpha\beta}\times G \arrow[ll, "g_\alpha"'] \arrow[dddl] \\
& \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[ul, "h_\alpha"'] \arrow[ur, "h'_\alpha"] \arrow[dl, "h_\beta"] \arrow[dr, "h'_\beta"'] & \\
U_{\alpha\beta}\times G \arrow[uu, "g_{\alpha\beta}"] \arrow[dr] & & U_{\alpha\beta}\times G \arrow[ll, "g_\beta"] \arrow[uu, "g'_{\alpha\beta}"'] \arrow[dl] \\
& U_{\alpha\beta} &
\end{tikzcd}$$

这是 Čech 上边缘条件.

Čech 上圈在上述等价关系下的等价类的集合记作 $H^1(\mathscr{U};G)$. 它也表示 X 上可由开覆盖 $\mathscr{U}$ 局部平凡化的 G-主丛等价类的集合.

若开覆盖 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的细化, 带有映射 $j\colon \mathscr{V}\to\mathscr{U}$ 满足 $V\subset j(V)$, 则由限制, 我们得到映射

$$r_{\mathscr{V},\mathscr{U}}\colon H^1(\mathscr{U};G)\to H^1(\mathscr{V};G).$$

所有开覆盖关于细化构成一定向系统 (directed system), 且上述限制与定向系统相容, 故可将其上 $H^1(-;G)$ 的极限定义为

$$H^1(X;G)=\varinjlim H^1(\mathscr{U};G),$$

自然地, $H^1(X;G)$ 表示 X 上 G-主丛等价类的集合:

$$\mathrm{Prin}_G(X)\simeq H^1(X;G).$$

若 G 是 Abel 群, 则 $H^1(X;G)$ 正是 X 的 G 系数第一 Čech 上同调群. (当 G 非交换时, $H^1(X;G)$ 不是群, 只是带有一个特殊元素的集合, 这个特殊元素是 X 上的平凡 G-丛.)

例 1　二重覆盖就是 $\mathbb{Z}_2$-主丛, X 上的二重覆盖一一对应于 $H^1(X;\mathbb{Z}_2)$ 的元素.

例 2　对于流形 X, 其万有覆盖 $p\colon \tilde{X}\to X$ 是一个 $\pi_1(X)$-主丛.

2.2　分类空间与万有主丛

群 G 的分类空间是一个连通空间 BG, 带有 G-主丛 $EG\to BG$, 称为*万有 G-主丛* (universal principal G-bundle), 满足如下条件. 对任意紧 Hausdorff 空间 X, 有一一对应

$$\begin{aligned}\{X\text{ 上的 }G\text{-主丛}\}/\text{同构}\quad &\leftrightarrow\quad \{\text{映射 }X\to BG\}/\text{同伦}\\ f^*EG\quad &\leftarrow\!\shortmid\quad f.\end{aligned}$$

BG 在同伦等价的意义下是唯一的.

万有主丛的等价定义是一个全空间可缩的 G-主丛.

设 Λ 为环, 考虑 BG 的 Λ 系数 (奇异) 上同调. 每个元素 $c\in H^k(BG;\Lambda)$ 都定义了 G-主丛的一个示性类: 对 G-主丛 $P\to X$, 存在映射 $f\colon X\to BG$ 使得 $P\simeq f^*EG$, 从而

$$c(P):=f^*(c)\in H^k(X;\Lambda)$$

定义了 G-主丛的一个示性类.

2.3　O_n-主丛与定向

设 $\pi\colon E\to M$ 是 n 维向量丛. 其对应的 O_n-主丛 $P_O(E)$ 可视为 E 的单位正交标架丛. E 的定向丛 $\mathrm{Or}(E)=P_O(E)/\mathrm{SO}_n$. 它是二重覆盖, E 可定向当且仅当它是平凡丛.

二重覆盖也就是 $\mathbb{Z}_2$-主丛. 因此, 空间 X 上的二重覆盖的等价类一一对应于 $H^1(X;\mathbb{Z}_2)$ 的元素.

2.4 关联丛

设 $\pi\colon P \to X$ 为 G-主丛. 给定 G 在另一空间 F 上的左作用 ρ, 我们可构造 X 上一个以 F 为纤维的丛

$$P \times_\rho F = P \times F/((pg, f) \sim (p, gf)),$$

称为关联丛 (assciated bundle).

G-主丛的关联丛的结构群是 G; 事实上, 结构群是 G 的丛一定是 G-主丛的关联丛: 给定以 G 为结构群的丛 $\pi\colon E \to B$, 设 $(U_i, \phi_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F)$ 是其局部平凡化, 转移映射为 $\phi_{ij}\colon U_i \cap U_j \to G$. 那么我们可定义 G-主丛 $P \to X$, 其局部平凡化为 $(U_i, g_i\colon U_i \to U_i \times G)$, 转移映射仍为 $\phi_{ij}\colon U_i \cap U_j \to G$.

例 1　向量丛 E 的正交标架丛 $P_{\mathrm{O}}(E)$ 是与之关联的 $\mathrm{O}(n)$-主丛; 若 E 可定向, 则其结构群可约化为 $\mathrm{SO}(n)$, 定向正交标架丛 $P_{\mathrm{SO}}(E)$ 是与之关联的 $\mathrm{SO}(n)$-主丛.

例 2　对于流形 X, 其万有覆盖 $p\colon \tilde{X} \to X$ 是一个 $\pi_1(X)$-主丛.

2.5 结构群的约化

给定群同态 $\varphi\colon H \to G$, H 左作用于 G 上. 结构群的约化 (reduction of structure group) 是指把一个以 G 为结构群的丛表示成一个以 H 为结构群的丛.

首先我们需要一个准备工作, 即通过群同态 $\varphi\colon H \to G$, 由 H-主丛可构造 G-主丛. 在抽象的层面上, 这是很明显的: 由分类空间的函子性, 态射 $H \to G$ 诱导 $BH \to BG$, 而 X 上的 H-主丛可视为态射 $X \to BH$. 这两个态射的复合即为 G-主丛 $X \to BG$. 然而我们也可给出这个 G-主丛具体的构造. 设 $\pi\colon P \to X$ 为 H-主丛. 定义

$$P \times_H G := E \times G \big/ (eh, g) \sim (e, hg),$$

则 $P \times_H G \to X$ 为 G-主丛, 其上的 G-右作用为 $(e, g)g' = (e, gg')$.

$$\begin{tikzcd} E \times_H G \arrow[r] \arrow[dr] & E \arrow[d, "\pi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

主丛的约化　设 $\pi\colon P \to X$ 为 G-主丛. 若存在 H-主丛 $P' \to X$ 使得 $P \simeq P' \times_H G$, 则称其结构群可约化为 H.

一般丛的约化　设 $E \to X$ 是以 G 为结构群的丛, 将其写为 G-主丛 P 的关联丛 $E = P \times_\rho F$, ρ 为 G 在 F 上的右作用. 若 P 的结构群可约化为 H, 那么 E 的结构群可约化为 H. 具体地, 若 $P = P' \times_H G$, 则

$$E = (P' \times_H G) \times_\rho F = \{(p', g, f)\} \bigg/ \begin{matrix} (p', hg, f) \sim (p'h, g, f) \\ (p', gg', f) \sim (p', g, g' \cdot f) \end{matrix} = P' \times_{\rho'} F,$$

其中 ρ' 是 H 在 F 上的左作用, $\rho'(h)(f) := \rho(\varphi(h))f$.

3 向量丛的自旋结构

3.1 定向结构与第一 Stiefel–Whitney 类

定向结构的定义　设 $\pi\colon E \to X$ 是 n 维向量丛. 定义 $P_{\mathrm{O}}(E)$ 为 E 的标准正交标架丛. $P_{\mathrm{O}}(E)$ 是 O_n-主丛.

向量丛的定向结构是下图中 $P_{\mathrm{O}}(E)$ 中的一个 SO_n-主丛.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SO}_n \arrow[r, hook] & \mathrm{O}_n \\
\curvearrowright & \curvearrowright \\
P_{\mathrm{SO}}(E) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi'"'] & P_{\mathrm{O}}(E) \arrow[d, "\pi"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

定向结构将向量丛的结构群由 $\mathrm{O}(n)$ 约化到 $\mathrm{SO}(n)$, 它与第一 Stiefel–Whitney 类有关.

我们不加证明地陈述下列事实.

命题 3.1. *上同调环 $H^*(\mathrm{BO}_n;\mathbb{Z}_2)$ 是 $\mathbb{Z}_2$ 上由典范的生成元 $w_k \in H^k(\mathrm{BO}_n;\mathbb{Z}_2)$ 生成的多项式环.*

对 n 维向量丛 $E \to X$, 设其分类映射为 $f\colon X \to \mathrm{BO}_n$, 定义 $w_k(E) = f^* w_k$.

w_1 的另一种定义　E 的定向丛 $\mathrm{Or}(E)$ 定义为商丛 $P_{\mathrm{O}}(E)/\mathrm{SO}_n$. $\mathrm{Or}(E)$ 是 $\mathbb{Z}_2$-主丛, 即二重覆盖.

定义 $\mathrm{Or}(E)$ 在 $H^1(X;\mathbb{Z}_2)$ 中对应的上同调类为第一 Stiefel–Whitney 类 $w_1(E) \in H^1(X;\mathbb{Z}_2)$.

命题 3.2. *按照上述定义, 向量丛 E 可定向当且仅当 $w_1(E) = 0$, 且此时定向结构一一对应于 $H^0(X;\mathbb{Z}_2)$ 的元素 (即每个连通分支上有两个选取).*

命题 3.3. *w_1 的两种定义相容.*

证明. 我们只须验证如下事实.

(i) w_1 是自然的, 即与拉回相容;

(ii) 对于万有丛 $\mathbb{E}\mathrm{O}_n \to \mathrm{BO}_n$, $w_1(\mathbb{E}\mathrm{O}_n)$ 是 $H^1(\mathrm{BO}_n;\mathbb{Z}_2)$ 的生成元.

性质 (i) 是因为标准正交标架丛是自然的, 即 $f^* P_{\mathrm{O}}(E) = P_{\mathrm{O}}(f^* E)$, 从而定向丛也是自然的. 性质 (ii) 是因为万有 n-向量丛不可定向. (否则所有的 n-向量丛都可定向, 这不可能.) □

另一种看法是短正合列

$$1 \to \mathrm{SO}_n \xrightarrow{i} \mathrm{O}_n \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

诱导上同调的正合列

$$H^1(X;\mathrm{SO}_n) \xrightarrow{i_*} H^1(X;\mathrm{O}_n) \xrightarrow{\rho_*} H^1(X;\mathbb{Z}_2)$$

(但这个正合列无法继续延伸, 因为 $\mathrm{SO}_n, \mathrm{O}_n$ 非交换.)

3.2 自旋结构与第二 Stiefel–Whitney 类

自旋结构将向量丛的结构群由 $\mathrm{SO}(n)$ 约化到 Spin_n.

自旋结构的定义　设 $n \geq 3$, $\pi\colon E \to X$ 是定向向量丛. 定义 $P_{\mathrm{SO}}(E)$ 为 E 的定向标准正交标架构成的 SO_n-主丛.

E 上的自旋结构 (spin structure) 是一个 Spin_n-主丛 $P_{\mathrm{Spin}}(E)$ 与一个二重覆盖 $\xi\colon P_{\mathrm{Spin}_n}(E) \to P_{\mathrm{SO}}(E)$, 满足相容性条件 $\xi(p \cdot g) = \xi(p) \cdot \xi_0(g)$, 其中 $\xi_0\colon \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SO}(n)$ 是万有覆盖.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_2 \arrow[r] & \mathrm{Spin}_n \arrow[rr, "\xi_0"] \arrow[d, phantom, "\curvearrowright"] & & \mathrm{SO}_n \arrow[d, phantom, "\curvearrowright"] \\
\mathbb{Z}_2 \arrow[r] & P_{\mathrm{Spin}}(E) \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & P_{\mathrm{SO}}(E) \arrow[dl, "\pi"] \\
& & X &
\end{tikzcd}
$$

命题 3.4. 向量丛 E 上的自旋结构一一对应于 $H^1(P_{\mathrm{SO}}(E);\mathbb{Z}_2)$ 限制在纤维上非平凡的元素.

证明. 设 $\xi \in H^1(P_{\mathrm{SO}}(E);\mathbb{Z}_2)$ 限制在纤维上非平凡, 即 ξ 为二重覆盖 $\xi\colon P' \to P_{\mathrm{SO}}(E)$, 则 $\pi \circ \xi\colon P' \to X$ 的每个纤维为 SO_n 的非平凡二重覆盖, 从而同胚于 Spin_n. 由覆盖空间理论, $\mathrm{SO}(n)$ 在 $P_{\mathrm{SO}}(E)$ 上的作用可提升为 Spin_n 在 P' 上的作用, 从而使 P' 成为 Spin_n-主丛. $\square$

w_2 **的第二种定义**　短正合列

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SO}_n \to 1$$

诱导上同调的正合列

$$H^0(X;\mathrm{SO}_n) \to H^1(X;\mathbb{Z}_2) \to H^1(X;\mathrm{Spin}_n) \to H^1(X;\mathrm{SO}_n) \xrightarrow{\delta} H^2(X;\mathbb{Z}_2).$$

定义

$$w_2(E) := \delta([P_{\mathrm{SO}}(E)]).$$

命题 3.5. 按照上述定义, $P_{\mathrm{SO}}(E)$ 的结构群可约化为 Spin_n 当且仅当 $w_2(E) = 0$.

w_2 **的第三种定义**　首先我们介绍谱序列中的 "五项正合列"(five-term exact sequence). 设 $E_2^{p,q} \Rightarrow H^n(A)$ 为第一象限谱序列, 则存在五项正合列

$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1(A) \to E_2^{0,1} \xrightarrow{\delta_2} E_2^{2,0} \to H^2(A).$$

这个正合列来自下图, 以及谱序列的收敛性.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[drr] & E_2^{0,1} \arrow[drr, "\delta_2"] & & & \\
& E_2^{0,0} & E_2^{1,0} \arrow[drr] & E_2^{2,0} & \\
& & & & 0
\end{tikzcd}
$$

对于纤维丛

$$\mathrm{SO}_n \xrightarrow{i} P_{\mathrm{SO}}(E) \xrightarrow{\pi} X,$$

五项正合列的前四项给出

$$0 \to H^1(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^1(P_{\mathrm{SO}}(E);\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^1(\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{w_E} H^2(X;\mathbb{Z}_2).$$

注意五项正合列中 $E_2^{1,0} \to H^1(A)$ 与 $H^1(A) \to E_2^{0,1}$ 两个映射称为边界映射 (edge map), 在 Serre 谱序列中分别对应 π^* 与 i^*.

设 $g_2 \in H^1(\mathrm{SO}_n; \mathbb{Z}_2)$ 为生成元, 我们定义 $w_2(E) = w_E(g_2)$ 是 E 的第二 Stiefel–Whitney 类. 回忆自旋结构对应于 $H^1(P_{\mathrm{SO}}(E); \mathbb{Z}_2)$ 在 i^* 之下像非零的元素, 故

命题 3.6. *按照上述定义, 可定向向量丛 E 存在自旋结构当且仅当 $w_2(E) = 0$, 且此时自旋结构一一对应于 $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ 的元素.*

比较命题3.2.

通过验证自然性与非平凡性, 类似可得

命题 3.7. *w_2 的三种定义相容.*

3.3 O_n 的 Whitehead 塔

SO_n 与 Spin_n 位于 O_n 的 Whitehead 塔的末端:

$$\cdots \to \mathrm{Fivebrane}_n \to \mathrm{String}_n \to \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SO}_n \to \mathrm{O}_n$$

这个序列是通过依次去除同伦群得到的: 从 O_n 开始, 去除 π_0 得到 SO_n, 去除 π_1 得到 Spin_n, 而 $\pi_2(\mathrm{Spin}_n) \simeq \pi_2(\mathrm{SO}_n) = 0$, 去除 π_3 得到 String_n, 等等. 其中, 所谓去除同伦群 π_n 是通过考虑到 Eilenberg–Maclane 空间的映射 $X \to K(G, n)$, 使得其在 π_n 上诱导同构, 那么这个映射的同伦纤维 F 满足 $\pi_n(F) = 0$, $\pi_i(F) \simeq \pi_i(X)\,(i > n)$.

X 上的向量丛可视为映射 (的同伦类)$X \to \mathrm{BO}_n$. 向量丛上存在定向结构等价于这个映射可以提升至 BSO_n, 存在自旋结构等价于这个映射可以提升至 BSpin_n.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{BString}_n \arrow[r] & \mathrm{BSpin}_n \arrow[r] & \mathrm{BSO}_n \arrow[r] & \mathrm{BO}_n \\
& & & & X \arrow[u] \arrow[ul, dashed] \arrow[ull, dashed]
\end{tikzcd}$$

4 自旋流形与自旋配边

若一个流形的切丛有自旋结构, 则称其为*自旋流形* (spin manifold).

回忆命题3.6, 可定向流形 X 有自旋结构等价于 $w_2(X) = 0$, 且此时自旋结构一一对应于 $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ 的元素.

5 Cliffod 丛与旋量丛

5.1 Clifford 丛

由于 $\mathbb{R}^n$ 的正交变换诱导 $\mathscr{T}\mathbb{R}^n$ 的自同构, 且保持理想 $(x \otimes x + q(x) : x \in \mathbb{R}^n)$ 不变, 所以正交变换也诱导商代数 $\mathrm{C}\ell_n$ 的自同构. 我们得到 SO_n 在 $\mathrm{C}\ell_n$ 上的左作用

$$\mathrm{c}\ell(\rho_n) \colon \mathrm{SO}_n \to \mathrm{Aut}(\mathrm{C}\ell_n).$$

定义带定向 Riemann 向量丛 E 的 *Clifford 丛*为关联丛

$$\mathrm{C}\ell(E) = P_{\mathrm{SO}}(E) \times_{\mathrm{c}\ell(\rho_n)} \mathrm{C}\ell_n.$$

我们可以把 $\mathrm{C}\ell(E)$ 想象成以 E 的每个纤维构造一个 Clifford 代数得到的代数丛. 事实上

$$\mathrm{C}\ell(E)=(\bigoplus_r \otimes^r E)/I(E),$$

$I(E)$ 是由 $v\otimes v+|v|^2$ 生成的理想丛.

Clifford 代数的内蕴结构可迁移到 Clifford 丛上. 如存在 $\mathbb{Z}_2$ 分次结构 $\mathrm{C}\ell(E)=\mathrm{C}\ell^0(E)\oplus\mathrm{C}\ell^1(E)$, 且由典范线性同构 $\wedge^*\mathbb{R}^n\to\mathrm{C}\ell_n$ 可构造向量丛的典范同构 $\wedge^*E\to\mathrm{C}\ell(E)$.

5.2 旋量丛, $\mathrm{C}\ell(E)$ 上的不可约模

设 E 是定向向量丛, 具有自旋结构 $\xi\colon P_{\mathrm{Spin}}(E)\to P_{\mathrm{SO}}(E)$. 定义 E 的一个 (实) *旋量丛* (spinor bundle) 是如下形式的丛:

$$S(E)=P_{\mathrm{Spin}}(E)\times_\mu M,$$

其中 M 是 $\mathrm{C}\ell_n$-左模, μ 是 $\mathrm{Spin}_n\subset\mathrm{C}\ell_n$ 在 M 上的左作用.

回忆自旋结构即为 $P_{\mathrm{SO}}(E)$ 到 $P_{\mathrm{Spin}}(E)$ 的约化; 当自旋结构存在时, 有 $P_{\mathrm{SO}}(E)=P_{\mathrm{Spin}}(E)\times_{\xi_0}\mathrm{SO}_n$, 因此

$$\begin{aligned}\mathrm{C}\ell(E)&=P_{\mathrm{SO}}(E)\times_\rho\mathrm{C}\ell_n\\&=P_{\mathrm{Spin}}(E)\times_{\xi_0}\mathrm{SO}_n\times_\rho\mathrm{C}\ell_n\\&=P_{\mathrm{Spin}}(E)\times_{\mathrm{Ad}}\mathrm{C}\ell_n.\end{aligned}$$

其中 $\rho\colon\mathrm{SO}_n\to\mathrm{Aut}(\mathrm{C}\ell_n)$ 是正交变换诱导的 Clifford 代数的自同构, $\xi_0\colon\mathrm{Spin}_n\to\mathrm{SO}_n$ 是二重覆盖, 而伴随表示 $\mathrm{Ad}=\rho\circ\xi_0\colon\mathrm{Spin}\to\mathrm{SO}_n\to\mathrm{Aut}(\mathrm{C}\ell_n)$.

左乘作用 ℓ 与伴随表示 Ad 是不一样的.

命题 5.1. *设 $S(E)$ 为 E 的一个实旋量丛. 那么 $S(E)$ 可作为代数丛 $\mathrm{C}\ell(E)$ 的模丛.*

证明. 回忆 $S(E)=P_{\mathrm{Spin}}(E)\times_\mu M$, 我们需要定义映射

$$\mu\colon\mathrm{C}\ell(E)\otimes S(E)\to S(E).$$

而

$$\mathrm{C}\ell(E)\otimes S(E)=(P_{\mathrm{Spin}}\times_{\mathrm{Ad}}\mathrm{C}\ell_n)\otimes(P_{\mathrm{Spin}}\times_\mu M)=P_{\mathrm{Spin}}\times_{\mathrm{Ad}\otimes\mu}(\mathrm{C}\ell_n\otimes M).$$

定义

$$\mu\colon\varphi\otimes(p,m)\mapsto(p,\varphi m).$$

良定性. 对 $g\in\mathrm{Spin}_n$, $\varphi\otimes(p,m)\sim\mathrm{Ad}_g(\varphi)\otimes(pg^{-1},gm)$, 而

$$\mu(\mathrm{Ad}_g(\varphi)\otimes(pg^{-1},gm))=(pg^{-1},g\varphi g^{-1}gm)\simeq(p,\varphi m).$$

□

6 联络

6.1 联络的一般概念

联络刻画了纤维丛各纤维之间的关系. 以下的四种结构都体现了联络. 在某些场合, 它们可以互相转化.

1. 水平空间 (horizontal spaces).
2. Lie 代数取值的 1-形式.
3. 协变导数 (covariant derivative).
4. 平行移动 (parallel transport).

联络的第一种定义．水平空间　设 X 是 n 维流形, $\pi\colon P\to X$ 是 G-主丛. 设 τ 是 P 的切 n-平面场, 即对每个 $p\in P$, τ_p 是 T_pP 的 n 维子空间. 且满足 $\pi_*\colon \tau_p\to T_pX$ 为线性同构. 称 τ_p 为 p 处的*水平空间*.

进一步假设 τ_p 是 G-等变 (equivariant) 的, 即

$$\tau_{p\cdot g}=\tau_p\cdot g\,(g\in G),$$

则 τ 定义了 P 上的一个联络.

水平空间与平行移动的关系　我们将沿着水平子空间的 "无穷小移动" 视为平行移动.[注 6]

垂直空间与 Lie 代数　记 $\mathscr{V}_p$ 为 p 所在的纤维在 p 处的切空间, 称为*垂直空间*. 回忆 G 右作用于 P 上, 其轨道正是 P 的纤维, 于是 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的元素 (作为 "无穷小变换") 对应 P 的垂直向量场. 具体而言, $V\in\mathfrak{g}$ 给出了 P 上的向量场 $\tilde V$, 满足

$$\tilde V_p=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(p\cdot\exp(tV))\in\mathscr{V}_p,$$

且 $V\mapsto\tilde V_p$ 给出了线性同构 $\mathfrak{g}\to\mathscr{V}_p$.

联络的第二种定义．联络形式　设 $\omega\in\Omega^1(P,\mathfrak{g})$, 假设对任意 $V\in\mathfrak{g}$ 有 $\omega(\tilde V_p)=V$, 且 ω 满足 G-等变条件, 即

$$\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\omega=g^*\omega\,(g\in G),$$

(其中 Ad 是 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示.) 则 ω 定义了 P 上的一个联络, 称 ω 为其*联络形式* (connection form).

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, dashed, "g_*X"] & \bullet & & \bullet \arrow[r, dashed, "\mathrm{Ad}_g(\omega(X))"] & \bullet \\
p \arrow[u, "g"] \arrow[r, dashed, "X"'] & \bullet \arrow[u, "g"'] \arrow[r, phantom, "\underset{\omega}{\Longrightarrow}"] & & e \arrow[u, "g"] \arrow[r, dashed, "\omega(X)"'] & \bullet \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

上图直观地展示了 ω 的 G-等变条件:

$$\omega(g_*X)=\mathrm{Ad}_g(\omega(X)),$$

此即

$$g^*\omega=\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\omega.$$

水平空间与 1-形式的关系　T_pP 是水平空间 τ_p 与垂直空间 $\mathscr{V}_p$ 的直和. 于是, 投影 $T_pP\to\mathscr{V}_p$ 可视为 $\mathfrak{g}$-取值的 1-形式 $\omega_p\colon T_pP\to\mathfrak{g}$.

直观上, $\mathfrak{g}$-取值的 1-形式 ω 衡量的是 P 上的无穷小移动所造成的垂直方向 "高度" 的变化, 由此我们可以对截面 "求导", 这便是协变导数.

当然, 由这样一个 1-形式我们也可以反过来得到水平空间 $\tau_p=\ker\omega_p$. τ_p 便是那些 "高度" 不变的无穷小移动, 也即平行移动.

[注 6] 在此我们不具体介绍平行移动.

联络的局部表达式　局部上, 联络的信息可由底空间 B 上的 $\mathfrak{g}$-取值 1-形式给出. (之所以只能局部表达, 是因为对于非平凡的 G-主丛而言, 底空间上的 1-形式无法表示全局的联络.)

例如 $G=(\mathbb{R},+)$, $P=\mathbb{R}\times M$ 是 M 上的 G-主丛. (想象 M 是地球表面, P 是地球大气层.) 此时 P 上的联络在局部上就形如 df, f 是 M 上的函数. (想象 f 是地表的海拔高度.)

我们将给出联络的局部表达式, 并且写下不同局部平凡化之间的关系.

设 $\pi\colon P\to X$ 为 G-主丛, U 为 X 的开集, 使得存在局部截面 $\sigma\colon U\to P$, 与相应的局部平凡化

$$\varphi\colon U\times G\to\pi^{-1}(U),(x,g)\mapsto\sigma(x)\cdot g.$$

$$\begin{tikzcd}
U\times G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

那么 $\varphi^*\omega\in\Omega^1(U\times G,\mathfrak{g})$ 是 $U\times G$ 上的联络. 为了具体写下 $\varphi^*\omega$ 的表达式, 我们首先设

$$\varphi^*\omega=\omega_0+\omega_1,$$

其中 $\omega_0=a_i(x,g)dx^i$, $\omega_1=b_i(x,g)dg^i$,

由联络的条件, 我们有 $\omega_1=g^{-1}dg$. 这是 *Maurer–Cartan* 形式, 即 G 上唯一的左不变 $\mathfrak{g}$-取值 1-形式. 它衡量的是垂直方向的移动, 是联络形式中冗余的信息.

记 $\omega_U=\pi_1^*\sigma^*\omega\in\Omega^1(U\times G,\mathfrak{g})$. 那么 $\omega_0=\operatorname{Ad}_{g^{-1}}\omega_U$. [注 7] 综上,

$$\varphi^*\omega=\operatorname{Ad}_{g^{-1}}\omega_U+g^{-1}dg.$$

现在设 U 上有另一个局部平凡化, 重复如上的构造, 记号上用一撇表示.

$$\begin{tikzcd}
U\times G \arrow[drr, "\varphi'"] \arrow[dddr, "\pi_1'"] & & \\
& & \pi^{-1}(U) \arrow[ddl, "\pi"] \\
U\times G \arrow[uu, "\Phi"] \arrow[urr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \\
& U &
\end{tikzcd}$$

设 $\Phi(x,g)=(x,h(x)g)$, 其中转移函数 $h\colon U\to G$ 满足

$$\varphi(x,g)=\sigma(x)\cdot g=\sigma'(x)\cdot h(x)g=\varphi'(x,h(x)g).$$

因为

$$\varphi^*\omega=\Phi^*(\varphi')^*\omega,$$

所以

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ad}_{g^{-1}}\omega_U+g^{-1}dg&=\operatorname{Ad}_{(h(x)g)^{-1}}\omega_U'+(h(x)g)^{-1}d(h(x)g)\\
&=\operatorname{Ad}_{g^{-1}}\operatorname{Ad}_{h(x)^{-1}}\omega_U'+g^{-1}h(x)^{-1}(dh(x)g+h(x)dg)\\
&=\operatorname{Ad}_{g^{-1}}\left(\operatorname{Ad}_{h(x)^{-1}}\omega_U'+h(x)^{-1}dh(x)\right)+g^{-1}dg.
\end{aligned}$$

我们得到

$$\omega_U=\operatorname{Ad}_{h(x)^{-1}}\omega_U'+h(x)^{-1}dh(x). \tag{$\star$}$$

[注 7]这里略去了一些细节.

6.2 不同主丛上的联络

回忆对于群同态 $\varphi\colon H \to G$, 由 H-主丛 $P \to X$ 可构造 G-主丛 $P' := P \times_\varphi G \to X$. 我们研究 P 与 P' 上联络的关系.

首先注意到存在自然的映射 $P \to P'$, $p \mapsto (p, e)$, e 是 G 的单位元. 我们假设 φ 是单同态, 那么映射 $P \to P'$ 是嵌入.

命题 6.1. *设 $\varphi\colon H \to G$ 是单同态, 那么 P 上的一个联络唯一确定了 P' 上的联络, 使得联络形式满足*

$$\omega'\big|_P = \varphi_* \omega.$$

其中我们将 P 视为 P' 的子丛, $\omega(\omega')$ 为 $P(P')$ 上的 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$-取值的 1-形式, $\varphi_*\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ 是 Lie 代数同态.

评注. 这个命题是不足为怪的. 回忆前面的评注, H-主丛联络的信息在局部上可由底空间 B 上的 $\mathfrak{h}$-取值 1-形式给出, 而群同态 $\varphi\colon H \to G$ 又给出了 Lie 代数同态 $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$, 所以由 $\mathfrak{h}$-取值 1-形式可得到 $\mathfrak{g}$-取值 1-形式.

6.3 向量丛上的联络

可定向向量丛上的联络 (协变导数) 来自于其关联的 SO_n-主丛上的联络.

协变导数 设 $E \to X$ 是向量丛, E 上的协变导数是线性映射

$$\nabla\colon \Gamma(E) \to \Gamma(T^*X \otimes E),$$

满足 Leibniz 法则

$$\nabla(fe) = df \otimes e + f\nabla e.$$

这里 $\Gamma(E)$ 应理解为局部的截面. (有的向量丛没有整体截面.)

设 $E \to X$ 是向量丛, $P = P_{\mathrm{SO}}(E)$ 是其对应的 $\mathrm{SO}(n)$-主丛.

注意到 $\mathrm{SO}(n)$ 的 Lie 代数是反对称矩阵的空间 $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$-取值的 1-形式可视为 $n \times n$ 矩阵值 1-形式 (ω_{ij}), 其中 $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$.

命题 6.2. *设 $\omega \in \Omega^1(P_{\mathrm{SO}}(E), \mathfrak{so}_n)$ 是 $P_{\mathrm{SO}}(E)$ 上的联络形式.*

设 U 是 X 的开集, $\mathscr{E} = (e_1, \cdots, e_n)\colon U \to P_{\mathrm{SO}}(E)$ 是 $P_{\mathrm{SO}}(E)$ 的局部截面, 也即 X 上的局部标准正交标架. 定义 $\tilde{\omega} = \mathscr{E}^*\omega \in \Omega^1(U, \mathfrak{so}_n)$, 记 $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_{ij})$.

那么 E 上存在唯一的协变导数 $\nabla\colon \Gamma(E) \to \Gamma(T^*X \otimes E)$, 使得对于任何如上的局部正交标架,

$$\nabla e_i = \sum_j \tilde{\omega}_{ji} \otimes e_j.$$

证明. 由 Leibniz 法则,

$$\nabla\Big(\sum f_i e_i\Big) = \sum_i df_i \otimes e_i + \sum_{i,j} f_i \tilde{\omega}_{ji} \otimes e_j = \sum_k \big(df_k + \sum_i f_i \tilde{\omega}_{ki}\big) \otimes e_k.$$

为了说明上式定义了 E 上整体的协变导数, 我们需要如下的相容性条件. 设 e_i' 是另一坐标卡上的局部标准正交标架, $\tilde{\omega}'_{ij}$ 是相应 $\mathfrak{so}_n$-取值 1-形式的分量, 在两坐标卡相交处设

$$e_i = \sum_j e_j' g_{ji}.$$

以 ∇ 作用之,
$$\sum_k \tilde{\omega}_{ki}\otimes e_k=\sum_{j,\ell}\tilde{\omega}'_{\ell j}\otimes e'_\ell g_{ji}+\sum_j dg_{ji}\otimes e'_j,$$
故而
$$\sum_k g_{\ell k}\tilde{\omega}_{ki}=\sum_j \tilde{\omega}'_{\ell j}g_{ji}+dg_{\ell i}$$
即
$$\tilde{\omega}=g^{-1}\tilde{\omega}'g+g^{-1}dg.$$

而这正是等式 $(\star)$.

□

6.4 Clifford 丛与旋量丛上的联络

设 E 为定向 Riemann 向量丛, 带有 Riemann 联络, 即 $P_{\mathrm{SO}}(E)$ 上的联络. 回忆表示
$$\mathrm{c}\ell(\rho_n)\colon \mathrm{SO}_n\to \mathrm{Aut}(\mathrm{C}\ell_n),$$
(我们已经证明它的像包含在 $\mathrm{SO}(\mathrm{C}\ell_n)$ 中.)

回忆 Clifford 丛
$$\mathrm{C}\ell(E)=P_{\mathrm{SO}}(E)\times_{\mathrm{c}\ell(\rho_n)}\mathrm{C}\ell_n.$$

Lie 群 $\mathrm{Aut}(\mathrm{C}\ell_n)$[注 8]的 Lie 代数 $\mathrm{Der}(\mathrm{C}\ell_n)$ 是由 $\mathrm{C}\ell_n$ 上的导子构成的. 代数 C 上的导子即线性映射 $d\colon C\to C$, 满足 $d(ab)=(da)b+a(db)$.

回忆命题6.1, SO_n-主丛 P 与其上的联络 $\omega\in\Omega^1(P_{\mathrm{SO}}(E),\mathfrak{so}_n)$ 唯一确定了一个 $\mathrm{Aut}(\mathrm{C}\ell_n)$-主丛 P' 与其上的联络 $\omega'\in\Omega^1(P',\mathrm{Der}(\mathrm{C}\ell_n))$.

回忆命题6.2, $\mathrm{C}\ell(E)$ 上的协变导数 ∇ 由 X 上局部的 1-形式 $\tilde{\omega}'=\sigma^*\omega'$ 定义, 其中 $\sigma\colon U\to P'$ 是 P' 的局部截面. 从而我们得到

命题 6.3. *E 上的 Riemann 联络诱导 $\mathrm{C}\ell(E)$ 上的协变导数 ∇, 其作为导子作用在 $\mathrm{C}\ell(E)$ 的局部截面上, 即对于 $\mathrm{C}\ell(E)$ 的局部截面 φ,ψ,*
$$\nabla(\varphi\cdot\psi)=(\nabla\varphi)\cdot\psi+\varphi\cdot(\nabla\psi).$$

现在进一步设向量丛 E 存在自旋结构 $\xi\colon P_{\mathrm{Spin}}(E)\to P_{\mathrm{SO}}(E)$. 由 $P_{\mathrm{SO}}(E)$ 上的联络 ω 可拉回得到 $P_{\mathrm{Spin}}(E)$ 上的联络 $\xi^*\omega\in\Omega^1(P_{\mathrm{Spin}}(E),\mathfrak{so}_n)$. (注意其中 $\mathfrak{so}_n$ 同时也是 Spin_n 的 Lie 代数.)

设 M 为 $\mathrm{C}\ell_n$-左模, $S(E)=P_{\mathrm{Spin}}(E)\times_\mu M$ 是旋量丛.

命题 6.4. *E 上的 Riemann 联络诱导 $S(E)$ 上的协变导数 ∇, 其作用与 $S(E)$ 的 $\mathrm{C}\ell(E)$-模结构相容, 即对 $\mathrm{C}\ell(E)$ 的截面 φ 与 $S(E)$ 的截面 σ,*
$$\nabla(\varphi\cdot\sigma)=(\nabla\varphi)\cdot\sigma+\varphi\cdot(\nabla\sigma).$$

证明. 表示 $\mathrm{Ad}=\mathrm{c}\ell(\rho_n)\colon \mathrm{Spin}_n\to\mathrm{SO}_n\to\mathrm{Aut}(\mathrm{C}\ell_n)$ 以及 $\mu\colon\mathrm{Spin}_n\to\mathrm{End}(M)$ 与 M 上的 $\mathrm{C}\ell_n$ 模结构相容. 具体地, 对 $g\in\mathrm{Spin}_n$, $\varphi\in\mathrm{C}\ell_n$, $\sigma\in M$,
$$\mu(g)(\varphi\cdot\sigma)=(g\varphi)\cdot\sigma=(g\varphi g^{-1})\cdot g\cdot\sigma=\big[\,\mathrm{Ad}_g(\varphi)\big]\cdot\big[\mu(g)(\sigma)\big].$$

[注 8]我们没有证明它是 Lie 群.

在 $g=1$ 处微分, 得对于 $A \in \mathfrak{so}_n$,

$$\mu_* A(\varphi \cdot \sigma) = \big[(c\ell(\rho_n)_* A)(\varphi)\big] \cdot \sigma + \varphi \cdot \big[(\mu_* A)(\sigma)\big].$$

□

6.5 Riemann 流形上的构造

设 X 是 Riemann 流形, $P_{\mathrm{SO}}(X) := P_{\mathrm{SO}}(TX)$ 是 TX 的定向 (单位正交) 标架丛. 记 X 上的 Clifford 丛 $\mathrm{C}\ell(X) := \mathrm{C}\ell(TX)$.

命题 6.5. *(Riemann 几何基本定理)* $P_{\mathrm{SO}}(X)$ *上存在唯一的联络, 使得对应的协变导数* ∇ *满足无挠条件*

$$\nabla_V W - \nabla_W V - [V, W] = 0.$$

进一步, 若 X *为自旋流形, 则这个联络可提升为* $P_{\mathrm{Spin}}(X)$ *上的联络. 从而诱导* X *上任何旋量丛上的联络.*

7 曲率

曲率是沿无穷小回路的平行移动, 刻画了主丛的平坦和扭曲.

设 $\pi\colon P \to X$ 是 G-主丛, $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ 是联络形式. 定义 ω 对应的曲率形式 (curvature form) $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ 为

$$\Omega = d\omega + [\omega, \omega].$$

命题 7.1. *对* $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathrm{C}\ell_n$,

$$\mathrm{Ad}_*(x \wedge y)(\varphi) = \frac{1}{4}\big[[x, y], \varphi\big].$$

证明. 在推论1.11中取 $M = \mathrm{C}\ell_n$, 注意到表示 $\mu = \mathrm{Ad}\colon \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SO}(\mathrm{C}\ell_n)$ 来自 $\mathrm{Ad}\colon \mathrm{C}\ell_n^\times \to \mathrm{Aut}(\mathrm{C}\ell_n)$[注 9], 故

$$\mathrm{Ad}_*(x \wedge y)(\varphi) = \frac{1}{4}[x, y] \cdot \varphi = \frac{1}{4}\big[[x, y], \varphi\big].$$

□

$$\begin{tikzcd}
 & & \omega & & \\
U \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\tilde{\sigma}"'] & P_{\mathrm{SO}}(E) \arrow[ur, dashed, no head] & & & \\
 & & \xi^*\omega & & \omega^s \\
 & P_{\mathrm{Spin}}(E) \arrow[uu, "\xi"'] \arrow[ur, dashed, no head] \arrow[rr, hook] & & P_{\mathrm{SO}}(S) \arrow[ur, dashed, no head] &
\end{tikzcd}$$

我们不加证明地给出如下结论. 注意与推论1.11的关系.

命题 7.2. *设* ω *为* $P_{\mathrm{SO}}(E)$ *上的联络形式,* S *为关联于* E *的旋量丛,* $\sigma = (e_1, \cdots, e_n)$ *为* E *的局部标准正交标架, 则* S *上的协变导数* ∇^s *由下式给出:*

$$\nabla^s \sigma_\alpha = \frac{1}{2}\sum_{i<j} \omega_{ji} \otimes e_i e_j \cdot \sigma_\alpha,$$

其中 $(\omega_{ij}) = \sigma^*\omega$ *是* ω *的局部表达式.*

[注 9]这里我们将 $\mathrm{C}\ell_n$ 视为

命题 7.3. *设 S 为 X 上的旋量丛, V, W 为 X 上的向量场, φ 是 S 的截面, 则 S 上的曲率算子可表示为*

$$R^s_{V,W}(\varphi) = \frac{1}{2}\sum_{i<j} \langle R_{V,W}(e_i), e_j\rangle e_i e_j \varphi.$$

8 微分算子理论

8.1 微分算子的象征

微分算子的象征 (symbol) 粗略地说即是将每个导数算子 ∂_i 变为一个变量 ξ_i.

首先我们给出微分算子的定义. 设 E, F 是微分流形 X 上的向量丛, 阶数分别为 q, p. 微分算子 $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ 是局部如下定义的算子:

$$P = \sum_{|\alpha|\le m} A^\alpha(x)\partial_x^\alpha.$$

其中 $A^\alpha(x)$ 是 $q \times p$ 矩阵函数, 存在 $|\alpha| = m$ 使得 $A^\alpha(x)$ 非零. 称 m 为微分算子 P 的阶数.

微分算子的主象征　微分算子 $D\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ 的主象征 (principal symbol) 是一族映射 $\sigma_\xi(D)\colon E_x \to E_x$ ($x \in X$, $\xi \in T_x^* X$ 是余切向量), 定义如下. 设局部上

$$D = \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha(x)\partial_x^\alpha, \quad \xi = \sum_k \xi_k dx_k,$$

那么

$$\sigma_\xi(D) = i^m \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

(注意这个求和只包括 $|\alpha| = m$, 即最高阶项)

若 $\xi \neq 0$ 时 $\sigma_\xi(D) \neq 0$, 则称算子 D 为椭圆算子 (elliptic operator).

例　设 X 为 Riemann 流形, E, F 为平凡线丛, 那么 $\Gamma(E) \simeq C^\infty(X)$. Laplace 算子 $\triangle\colon C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ 是 2 阶微分算子, 局部由下式定义:

$$\triangle = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{j,k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{g} g^{jk}\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \sum_{j,k} g^{jk}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \text{低阶项}.$$

因此 Laplace 算子的主象征是

$$\sigma_\xi(\triangle) = -\sum_{j,k} g^{jk}\xi_j\xi_k = -\|\xi\|^2.$$

其中 $\|\xi\|^2$ 表示 Riemann 流形余切空间上的诱导度量.

我们介绍关于椭圆算子的如下定理 [3, p.122].

命题 8.1. *若 $D\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ 为形式自伴的椭圆算子, 则 D 有离散的特征值, 以 ∞ 为聚点. 进一步, $L^2(X, E)$ 作为 Hilbert 空间分解为 D 的特征子空间的直和.*

9 Dirac 算子

9.1 起源

Paul Dirac 1928 年的论文 *The Quantum Theory of Electrons* 提出了第一个将狭义相对论纳入量子力学的理论. 文章的目标是找到满足 Lorentz 不变性的电子波方程, 即寻找 Hamilton 算子 H 以表达方程 $H\psi = i\partial_t\psi$[注 10], 且等价于经典理论的类比所得的波方程

$$\big(-\partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - m^2\big)\psi = 0, \tag{$*$}$$

其中 ∂_0 表示 ∂_t. 而狭义相对论要求的时空对称性使得 H 必须是一阶微分算子, 即形如

$$\big(\partial_0 + \alpha_1\partial_1 + \alpha_2\partial_2 + \alpha_3\partial_3 + \beta\big)\psi = 0.$$

因此, 问题化为求合适的 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$.

Dirac 指出, 上式导致

$$\begin{aligned} 0 &= \big(-\partial_0 + \alpha_1\partial_1 + \alpha_2\partial_2 + \alpha_3\partial_3 + \beta\big)\big(\partial_0 + \alpha_1\partial_1 + \alpha_2\partial_2 + \alpha_3\partial_3 + \beta\big)\psi \\ &= \Big(-\partial_0^2 + \sum_{j,k=1}^{3}\alpha_j\alpha_k\partial_j\partial_k + \beta^2 + \sum_{j=1}^{3}(\alpha_j\beta + \beta\alpha_j)\partial_j\Big)\psi, \end{aligned}$$

与 $(*)$ 式比较, 若令 $\beta = i\alpha_4 m$, 则只需以下条件:

$$\alpha_\mu^2 = 1, \quad \alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 0,$$

这正是 Clifford 代数的生成关系[注 11].

9.2 定义

设 X 为 Riemann 流形, S 是 $C\ell(X)$-左模丛, 且其上具有 Riemann 联络. (回忆命题5.1, 旋量丛上有 Clifford 丛的模结构)

S 上的 Dirac 算子 $D\colon \Gamma(S) \to \Gamma(S)$ 是由下式定义的一阶微分算子:

$$D\sigma = \sum_j e_j \nabla_{e_j}\sigma.$$

其中 $e_1, \cdots, e_n$ 是 T_xX 的单位正交基, 乘法为 Clifford 乘法 (将 T_xX 的向量视为 $C\ell(X)$ 的元素).

Dirac 算子的内蕴定义是如下的复合:

$$D\colon \Gamma(S) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*X \otimes S) \xrightarrow{\simeq} \Gamma(TX \otimes S) \xrightarrow{\mu} \Gamma(S).$$

因此这个算子也可写为 (特别是在物理文献中)

$$D = \gamma^\mu \nabla_\mu = g^{\mu\nu}\gamma_\mu\nabla_\nu,$$

其中 γ_μ 是 T_xX 的任意一组基.

命题 9.1. *Dirac 算子 D 的主象征是*

$$\sigma_\xi(D) = i\xi.$$

[注 10]这里简单起见我们考虑无外加电磁场的情形, 采用自然单位制, $\hbar = c = 1$. 另外, 我们将 Dirac 的原文使用的动量 p_μ 翻译为算子 $i\partial_\mu$.

[注 11]历史上 Dirac 本人并不了解 Clifford 的工作, 他的工作相当于使用矩阵给出了 Clifford 代数的一个表示.

9.3 Dirac 丛

我们抽象出 Dirac 算子所需的性质, 引入 *Dirac* 丛.

定义 *Dirac* 丛是 $C\ell(X)$ 的左模丛 S, 其上具有 Riemann 度量, 且 X 上的单位切向量在 S 上的作用是正交变换; 其上具有 Riemann 联络 ∇, 且联络与 $C\ell(X)$-模结构相容:

$$\nabla(\varphi\cdot\sigma)=(\nabla\varphi)\cdot\sigma+\varphi\cdot(\nabla\sigma).$$

一般流形上的 Clifford 丛 $C\ell(X)$ 和自旋流形上的旋量丛都是 Dirac 丛的例子.

由于 X 是 Riemann 流形且 S 上有 Riemann 度量, 我们可定义其两个截面的内积

$$(\sigma_1,\sigma_2)=\int_X\langle\sigma_1(x),\sigma_2(x)\rangle\,dV_g.$$

命题 9.2. *Dirac 算子是形式自伴的, 即对旋量丛 S 的 (光滑) 截面 σ_1,σ_2,*

$$(D\sigma_1,\sigma_2)=(\sigma_1,D\sigma_2).$$

证明. 取 $x\in X$, 取 x 一个邻域上的标准正交标架 $e_1,\cdots,e_n$.

$$\begin{aligned}\langle D\sigma_1,\sigma_2\rangle&=\sum_j\left\langle e_j\nabla_{e_j}\sigma_1,\sigma_2\right\rangle\\&=-\sum_j\left\langle\nabla_{e_j}\sigma_1,e_j\sigma_2\right\rangle\quad(e_j\text{ 的作用是正交变换, 且 }e_j^2=-1)\\&=-\sum_j\left(e_j\langle\sigma_1,e_j\sigma_2\rangle-\left\langle\sigma_1,(\nabla_{e_j}e_j)\sigma_2\right\rangle-\left\langle\sigma_1,e_j\nabla_{e_j}\sigma_2\right\rangle\right)\quad(\text{Leibniz})\end{aligned}$$

最后一项是我们想要的结果. 现在处理前面两项. 定义向量场 V,

$$\langle V,W\rangle=-\langle\sigma_1,W\sigma_2\rangle.$$

那么

$$\begin{aligned}-\sum_j\left(e_j\langle\sigma_1,e_j\sigma_2\rangle-\left\langle\sigma_1,(\nabla_{e_j}e_j)\sigma_2\right\rangle\right)&=\sum_j\left(e_j\langle V,e_j\rangle-\left\langle V,\nabla_{e_j}e_j\right\rangle\right)\\&=\sum_j\left\langle\nabla_{e_j}V,e_j\right\rangle=\operatorname{div}(V).\end{aligned}$$

$\operatorname{div}(V)$ 在 X 上的积分等于 0, 从而我们得到

$$(D\sigma_1,\sigma_2)=(\sigma_1,D\sigma_2).$$

□

椭圆算子理论给出

推论 9.3. *对于 Riemann 流形 X 上任意 Dirac 丛上的 Dirac 算子 D,*

$$\ker D=\ker D^2,$$

且为有限维线性空间.

9.4 例

9.4.1 一维的例子

Spin_1 是 SO_1 的二重覆盖, 即二阶群 $\{\pm 1\}$.

S^1 可定向, 且第二 Stiefel–Whitney 类等于 0, 故具有自旋结构. S^1 上的自旋结构一一对应于 $H^1(S^1;\mathbb{Z}_2)$ 的元素. 选定一个 SO_1-主丛 P_{SO}, 则 $P_{\mathrm{SO}} \simeq S^1$. S^1 的两个自旋结构分别为 P_{SO} 的两个二重覆盖.

$\mathrm{C}\ell(S^1)$ 同构于 S^1 上的平凡 $\mathbb{C}$ 丛; $\mathrm{C}\ell(S^1)$-左模丛即复向量丛. S^1 上的复向量丛是平凡的 (因为复向量丛的分类空间的一阶同伦群平凡). 尽管如此, 由于旋量丛可关联于不同的 Spin_n 主丛, 其上的协变导数并不只有平凡的一种.

平凡的自旋结构　考虑平凡的自旋结构, 关联于平凡丛 $S^1 \times \mathbb{C}$. 那么在 S^1 的参数化 e^{it} 之下, Dirac 算子 $D = i\partial_t$. 在一维复向量丛中它的特征向量是 $e^{2\pi i k t}$, 特征值是 $k \in \mathbb{Z}$. 我们知道这些特征向量构成了 $L^2(S^1, \mathbb{C})$ 的 Hilbert 正交基, 这是结论8.1的特例.

非平凡的自旋结构　考虑非平凡的自旋结构 P_{Spin} 与关联的一维复向量丛 $P_{\mathrm{Spin}} \times_\rho \mathbb{C}$, 可以写成

$$S^1 \times \mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{C}/(t,z) \sim (t+1,-z),$$

其中 $\rho\colon \{\pm 1\} \to \mathbb{C}^\times$ 是非平凡表示.

此时联络是平坦的, 但有非平凡的*和乐* (holonomy).[注 12] 具体地, 绕 S^1 一周的平行移动等于 -1.

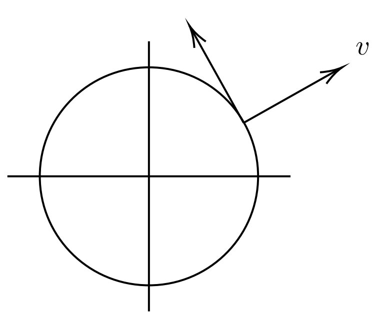
Dirac 算子在局部上仍然是 $i\partial_t$, 但整体上不同于前面的算子. 它的特征向量是 $e^{2\pi i(k+\frac{1}{2})t}$, 特征值是 $k + \frac{1}{2}\,(k \in \mathbb{Z})$.

下面我们将看到, S^1 上的非平凡自旋结构来自于 $\mathbb{R}^2$ 上唯一的自旋结构的限制.

9.4.2 二维的例子

Spin_2 是 SO_2 的二重覆盖. 两者均同构于 S^1, 此时覆盖映射对应 $z \mapsto z^2$.

考虑 2 维圆盘 $\mathbb{D}$. 因为 $\mathbb{D}$ 可缩, 所以任何主丛 $P_{\mathrm{Spin}}(\mathbb{D})$, $P_{\mathrm{SO}}(\mathbb{D})$ 均为 $\mathbb{D}$ 上的平凡丛. 考虑正交标架 (v,w), 其中 v 是 $\mathbb{D}$ 的边界 S^1 的法向量.



当它绕 S^1 转一圈时, 它的提升在 $P_{\mathrm{Spin}}(\mathbb{D})$ 上没有回到原处 (“在 Spin_2 上转了半圈”). 因此 $\partial\mathbb{D}$ 上的诱导自旋是 S^1 上的非平凡自旋结构.

有趣的是, 两个非平凡自旋的 S^1 放在一起与 0 自旋配边, 换言之, 两个非平凡自旋的 S^1 的连通和同构于平凡自旋, 因此一维的自旋配边群 Ω_1^{Spin} 是 $\mathbb{Z}_2$.

[注 12] 和乐是指沿环路的平行移动.

一般地, 考虑亏格为 g, 以 S^1 为边界的二维流形 M($\mathbb{D}$ 是 $g=0$ 的例子), 其边界上的诱导自旋是 S^1 上的非平凡自旋结构.

设 N 是 M 沿边界粘上圆盘得到的无边流形. 由于含入映射诱导同构 $H^1(N;\mathbb{Z}_2)\simeq H^1(M;\mathbb{Z}_2)$, M 上的自旋结构均为 N 上自旋结构的限制.

9.4.3　三维

紧可定向三维流形可平行化, 即其切丛是平凡丛. 这个事实可用自旋结构来证明.

命题 9.4. *紧可定向三维流形均有自旋结构.*

证明. (概要) 假设不然, 即存在紧可定向三维流形 M, $w_2(M)\neq 0$. 取 w_2 的 Poincaré 对偶 C, 使得 C 为 M 的 1 维子流形.

因为 $M\setminus C$ 中的 2 维曲面与 C 不相交, 由相交理论, $w_2\in H^2(M\setminus C;\mathbb{Z}_2)$ 等于 0. 这说明 $M\setminus C$ 存在自旋结构 σ, 但 σ 不能延拓到 M.

取 C 在 M 中的对偶曲面 F, F 与 C 横截相交于点 p. F 为 2 维闭子流形 (不一定可定向). 考虑 F 在 M 中的管状邻域 $\nu(F)$. 注意到

- 2 维闭流形可浸入 (is immersed into)$\mathbb{R}^3$,
- F 浸入在 $\mathbb{R}^3$ 中, 其法丛同胚于 $\nu(F)$,
- $\nu(F)$ 可继承 $\mathbb{R}^3$ 的自旋结构,
- 含入映射诱导了同构 $H^1(F;\mathbb{Z}_2)\to H^1(F\setminus p;\mathbb{Z}_2)$.

所以存在 $\nu(F)$ 上的某个自旋结构, 限制到 $\nu(F\setminus p)$ 上与来自 $M\setminus C$ 的自旋结构 σ 相等. 这说明 σ 可延拓到 C 上, 与假设矛盾. □

由上述命题, 紧可定向三维流形到 BSO_n 的映射可提升至 BSpin_n, 从而均零伦 (因为 BSpin_n 是 3-连通的), 从而紧可定向三维流形上的标准正交标架丛有一个截面, 而这意味着其切丛平凡.

9.4.4　四维

没有自旋结构的第一个紧可定向流形是 $\mathbb{C}P^2$. 事实上, $\mathbb{C}P^n$ 有自旋结构当且仅当 n 是奇数.

9.5　Dirac 算子的平方与 Laplace 算子

9.5.1　Riemann 几何复习

设 E 是 X 上的 Riemann 向量丛, 带有 Riemann 联络 ∇. 我们同时以 ∇ 表示 X 上的 Levi–Civita 联络, 但不会产生混淆.

对 X 上的向量场 V,W, E 的截面 φ,

$$\nabla^2_{V,W}\varphi=\nabla_V\nabla_W\varphi-\nabla_{\nabla_V W}\varphi.$$

由此 E 的 Riemann 曲率张量可表示为

$$R_{V,W}=\nabla^2_{V,W}-\nabla^2_{W,V}.$$

$\nabla^2_{V,W}$ 的重要性质是它在一点 x 处的值仅取决于 V_x 和 W_x, 而不取决于 V,W 在其它点处的值.

定义联络 *Laplace* 算子 (connection Laplacian)$\nabla^*\nabla$: [注 13]

$$\nabla^*\nabla\varphi := -\operatorname{tr}(\nabla^2\varphi) = -\sum_j \nabla^2_{e_j,e_j}\varphi.$$

这里 ∇^* 是 ∇ 的形式伴随 (formal adjoint), 但我们选择将 $\nabla^*\nabla$ 视为一个整体. 下面的命题证明了这个记号的合理性:

命题 9.5.

$$(\nabla^*\nabla\varphi,\psi) = (\nabla\varphi,\nabla\psi).$$

证明. 任取标准正交标架 $\{e_j\}$.

$$\begin{aligned}\langle\nabla^*\nabla\varphi,\psi\rangle &= -\sum_j \left\langle \nabla_{e_j}\nabla_{e_j}\varphi - \nabla_{\nabla_{e_j}e_j}\varphi,\psi\right\rangle \\ &= -\sum_j \nabla_{e_j}\left\langle\nabla_{e_j}\varphi,\psi\right\rangle + \sum_j\left\langle\nabla_{e_j}\varphi,\nabla_{e_j}\psi\right\rangle + \sum_j\left\langle\nabla_{\nabla_{e_j}e_j}\varphi,\psi\right\rangle.\end{aligned}$$

第二项是我们需要的结果. 现在处理第一项和第三项. 定义向量场 V 满足

$$\langle V,W\rangle = \langle\nabla_W\varphi,\psi\rangle,$$

那么

$$\begin{aligned}-\sum_j\nabla_{e_j}\left\langle\nabla_{e_j}\varphi,\psi\right\rangle + \sum_j\left\langle\nabla_{\nabla_{e_j}e_j}\varphi,\psi\right\rangle &= -\sum_j\nabla_{e_j}\langle V,e_j\rangle + \sum_j\left\langle V,\nabla_{e_j}e_j\right\rangle \\ &= -\sum_j\left\langle\nabla_{e_j}V,e_j\right\rangle = -\operatorname{div}(V).\end{aligned}$$

□

推论 9.6. $\nabla^*\nabla\colon\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ *是形式自伴的.*

Riemann 几何复习到此结束.

现在我们计算 D^2. 对给定的标准正交标架 $\{e_j\}$, 设

$$\Gamma^i_{jk} = \left\langle\nabla_{e_j}e_k,e_i\right\rangle.$$

那么

$$\Gamma^i_{jk}+\Gamma^k_{ji} = \nabla_{e_j}\langle e_k,e_i\rangle = 0.$$

$$\begin{aligned}D^2\varphi &= \sum_{j,k} e_j\nabla_{e_j}(e_k\nabla_{e_k}\varphi) \\ &= \sum_{j,k}\left(e_j\nabla_{e_j}e_k\nabla_{e_k}\varphi + e_je_k\nabla_{e_j}\nabla_{e_k}\varphi\right) \\ &= \sum_{j,k}\left(e_j\nabla_{e_j}e_k\nabla_{e_k}\varphi + e_je_k\nabla_{\nabla_{e_j}e_k}\varphi + e_je_k\nabla^2_{e_j,e_k}\varphi\right) \\ &= \underbrace{\sum_{j,k}\left(e_j\Gamma^i_{jk}e_i\nabla_{e_k}\varphi + \Gamma^i_{jk}e_je_k\nabla_{e_i}\varphi\right)}_{=0} - \sum_j\nabla^2_{e_j,e_j}\varphi + \sum_{j<k}e_je_kR_{e_j,e_k}\varphi \\ &= \nabla^*\nabla\varphi + \sum_{j<k}e_je_kR_{e_j,e_k}\varphi.\end{aligned}$$

对特殊的 Dirac 丛, 这个结论能导出许多有意义的公式. 下面我们分别考虑 Clifford 丛和旋量丛.

[注 13]Laplace 算子的符号永远是一个谜.

9.5.2 Clifford 丛上 Dirac 算子的平方, Hodge Laplace 算子

首先回忆 $\wedge^*(TX)$ 作为向量丛典范同构于 $\mathrm{C}\ell(X)$. 在这个向量丛上有外微分算子 d 与外微分的伴随算子 δ. Hodge Laplace 算子

$$\triangle = d\delta + \delta d$$

是一个保持分次结构的 2 阶微分算子.

推论 9.7. *设 X 是 Riemann 流形, $\triangle$ 是 TX 上的 Hodge Laplace 算子, 那么*

$$\triangle = \nabla^*\nabla + \mathrm{Ric}\,.$$

即 Hodge Laplace 算子与联络 Laplace 算子的差等于 Ricci 曲率.

证明. 见 [1, p.156]. □

9.5.3 旋量丛上 Dirac 算子的平方, Lichnerowicz 公式

设 X 为自旋流形, 即 TX 具有自旋结构. 设 S 是关联于 TX 的任一旋量丛, 则 S 是 $\mathrm{C}\ell(X)$-模丛, 带有典范 Riemann 联络.

这种情形下的 Dirac 算子最早由 Atiyah 与 Singer 发现, 故称为 Atiyah–Singer 算子.

对于 Atiyah–Singer 算子有如下的 Lichnerowicz 公式.

命题 9.8. *设 S 为自旋流形 X 上的旋量丛, 带有典范 Riemann 联络, $\not{D}$ 为 Atiyah–Singer 算子, $\nabla^*\nabla$ 为联络 Laplace 算子, 那么*

$$\not{D}^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}\kappa.$$

证明. 见 [1, p.161]. □

致谢

感谢张蓥莹老师, 周杰老师, 于品老师, 林剑锋老师, Reshetikhin 老师的指导, 以及参加讨论班的同学们给我的支持. 时间仓促, 没有大家及时的帮助我无法完成这篇演讲. 事实上, 演讲的不完善之处仍然明显: 符号不统一, 重点不突出, 很多概念和主题关系不大, 或许只能当作几何和拓扑的一次游览. 我高估了自己的学习能力, 对于 Dirac 算子的应用没有来得及准备. 但我在压力之下逼迫自己读了不敢读的文献, 做了不屑做的计算, 敲开了不曾拜访的老师办公室的门, 相信准备过讨论班的同学一定对此有体会. 所以, 感谢丘先生和张老师的组织让我获得了这些美妙的体验.

参考文献

[1] Lawson, H. Blaine; Michelsohn, Marie-Louise (1989), *Spin Geometry*, Princeton University Press, ISBN 978-0-691-08542-5

[2] Lichnerowicz, A. (1963), *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris, 257: 7–9

[3] Bourguignon, J.P., Hijazi, O., Milhorat, J., Moroianu, A., Moroianu, S. (2015). *A Spinorial Approach to Riemannian and Conformal Geometry*, European Mathematical Society, ISBN: 978-3-03719-136-1.